

Frank Kameier

Aerodynamische und akustische Grundbegriffe

Haus der Technik e.V., Essen
Seminar Aeroakustik
25.-26. Mai 2000

FH D

Fachhochschule Düsseldorf

Institut für Strömungsmaschinen
Fachbereich 4
Maschinenbau und Verfahrenstechnik
Josef-Gockeln-Str. 9
40474 Düsseldorf

Phone (0211) 4351-448
Fax (0211) 4351-509
E-Mail Frank.Kameier@fh-duesseldorf.de

In der Strömungsmechanik interessiert man sich wie in der Akustik für die örtliche und zeitlich Änderung von Drücken und Geschwindigkeiten. Die Akustik ist hinsichtlich der physikalischen Gleichungen ein Spezialgebiet der Mechanik bei einer Schallausbreitung in Festkörpern, ein Spezialgebiet der Strömungsmechanik bei einer Schallausbreitung in Fluiden oder der instationären Aerodynamik bei einer Ausbreitung in Gasen. Die akustischen Gleichungen lassen sich aus den strömungsmechanischen herleiten nicht aber umgekehrt. Schall wird in Gasen durch die Auslenkung der Fluidteilchen angeregt, aufgrund der thermodynamischen Zusammenhänge führt dies zu einer Dichte- und Druckschwankung. Breitet sich die Druckschwankung mit einer speziellen materialabhängigen Geschwindigkeit aus, so nennt man sie Schalldruckschwankung und die Ausbreitungsgeschwindigkeit Schallgeschwindigkeit. Als Hörschall werden Schalldruckschwankungen im Frequenzbereich 16 Hz bis 16 kHz bezeichnet.

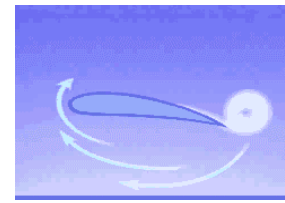
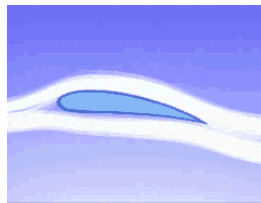
Aerodynamische und akustische Grundbegriffe

- Gleichungen zur Berechnung von Strömungen
- instationäre und turbulente Strömungen
- akustische Grundbegriffe
- Reynolds-Gleichung
- akustische Wellengleichung

Folie 1

Auftrieb und Bernoulli-Gleichung

Auftrieb und Zirkulation



Quelle: WDR, Quarks, 6/1999, <http://www.quarks.de/fliegen2/00.htm>

Quelle: WDR, Quarks, 6/1999, <http://www.quarks.de/fliegen2/00.htm>

Folie 2

Folie 4

Bernoulli-Gleichung

1-dimensionale Stromfadentheorie
mechanische Energiebilanz

$$\frac{c^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = K = \text{const.}$$

$\frac{m^2}{s^2}$ $\frac{m^2}{s^2}$ $\frac{m^2}{s^2}$

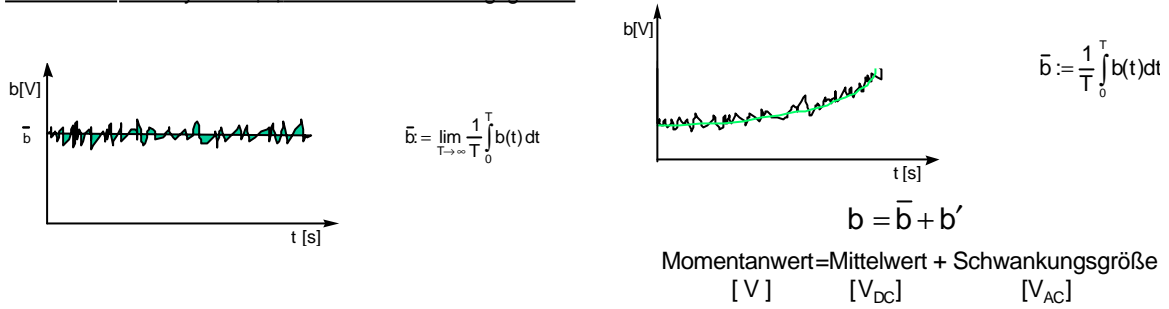
gültig nur für

- inkompressible Medien
- stationäre Strömungen
- reibungsfreie Strömungen
- im Schwerfeld der Erde

® hinsichtlich akustischer Anwendungen

Folie 3

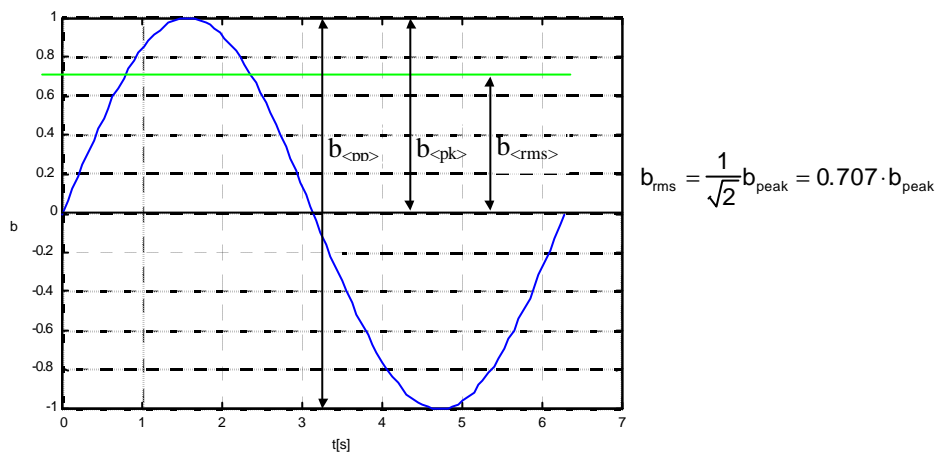
Instationäre Aerodynamik \Rightarrow zeitliche Schwankungsgrößen



Folie 5

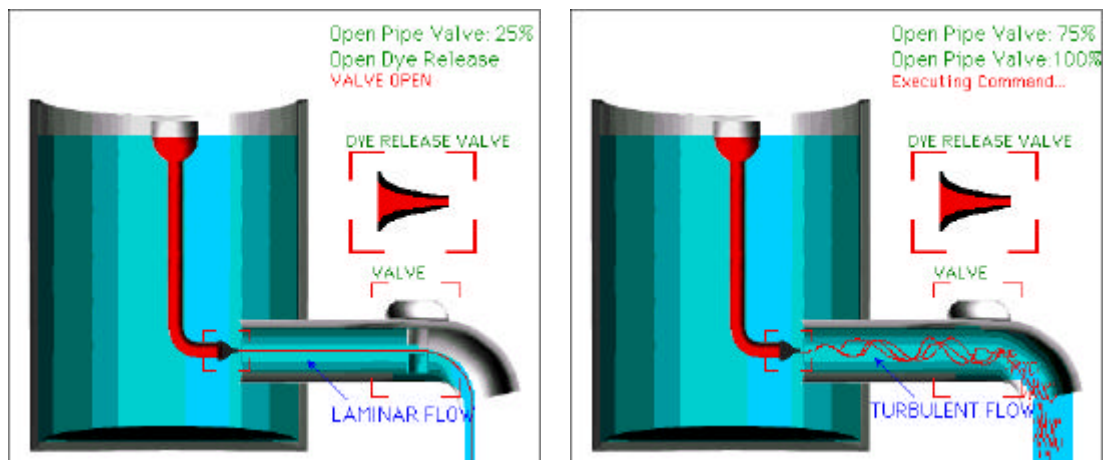
Folie 7

Sinus-Funktion mit rms-, Spitze- und Spitze-Spitze-Wert



Folie 6

laminare und turbulente Strömung (Reynoldscher Farbfadenversuch)



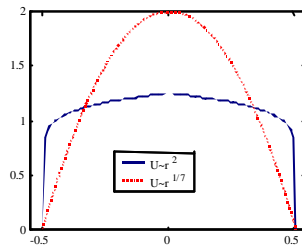
Quelle: Liggett, Caughey, Fluid Mechanics - An Interactive Text, ASME 1998

Folie 8

Reynoldszahl

$$Re = \frac{c \cdot D}{\nu}$$

c = charakteristische Geschwindigkeit
 D = charakteristischer Durchmesser
 ν = kinematische Zähigkeit



laminares und turbulentes Rohrströmungsprofil

Folie 9

zeitliche Schwankungsgrößen

$$b = \bar{b} + b'$$

$$\bar{b}' = 0$$

$$\overline{(b')^2} \neq 0$$

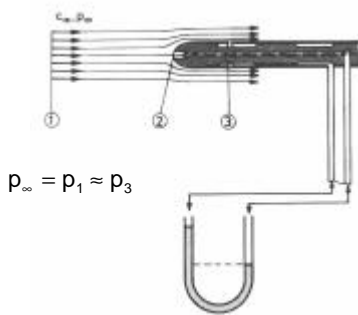
$$\overline{Ab'} = 0$$

$$\overline{a'b'} \neq 0$$

allgemeine Rechenregeln

Folie 10

Beispiel: Prandtl'sches Staurohr in turbulenter Strömung



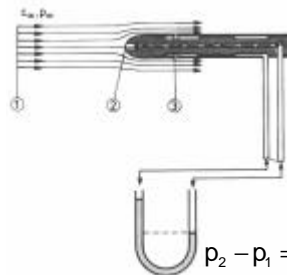
$$\frac{p_1 + c_1^2}{\rho} = \frac{p_2 + c_2^2}{\rho} \quad 0$$

$$p = \bar{p} + p' \quad c = \bar{c} + c'$$

$$\bar{c}_1 = \sqrt{2 \frac{p_2 - p_1}{\rho} - \overline{c_1'^2}}$$

Zahlenbeispiel: Prandtl'sches Staurohr in turbulenter Strömung

Folie 11



$$\bar{c}_1 = \sqrt{2 \frac{p_2 - p_1}{\rho} - \overline{c_1'^2}}$$

$$p_2 - p_1 = 200 \text{ Pa} \quad \Rightarrow 18,3 \text{ m/s} = 66 \text{ km/h}$$

unter Berücksichtigung von 10% Turbulenz $\Rightarrow 18,2 \text{ m/s}$

(10% Geschwindigkeitsschwankung entspricht 20% Druckschwankung)

Folie 12

Schalldruck und Schallschnelle

$$p = \bar{p} + p'$$

$$c = \bar{c} + c'$$

Schalldruckpegel

$$L_p = 20 \cdot \log \frac{p}{p_0}$$

$$p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ [Pa]}$$

(menschliche Hörschwelle bei 1000 Hz)

Folie 13

Effektivwert

$$p_{\text{eff.}} = \tilde{p} = \sqrt{p'^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} p_{\text{peak}} = 0.707 \cdot p_{\text{peak}}$$

Schalldruckpegel

$$L_p = 20 \cdot \log \frac{p}{p_0}$$

L_p [dB]	p [Pa]
60	0.02
80	0.2
100	2
106	4
120	20
134	100
140	200
194	100000 = 1bar

Folie 14

Schallintensität

$$I = p \cdot v = \frac{p^2}{\rho \cdot a} \quad (I = \tilde{p} \cdot \tilde{v} \quad v = |c'|)$$

Energieflußdichtevektor

$$\underline{q} = \rho \underline{c} h$$

Energiesatz
 $\frac{c^2}{2} + h = \text{const.}$

h=spez. Enthalpie

$$I = |\underline{q}|$$

für ideale Gase:

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T$$

Schalleistung

$$W = I \cdot S$$

$$L_w = 10 \cdot \log \frac{W}{W_0} = 10 \cdot \log \frac{p^2}{p_0^2} + 10 \cdot \log \frac{S}{S_0}$$

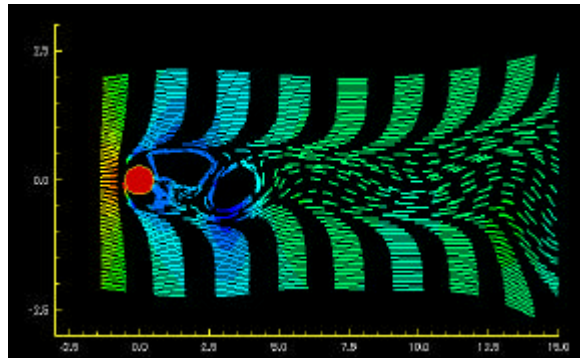
$$\text{mit } L_p = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{p^2}{p_0^2}$$

$$L_w = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} + 10 \cdot \log \frac{S}{S_0}$$

$$W_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ [W]} \quad I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ [W/m}^2\text{]} \quad S_0 = 1 \text{ [m}^2\text{]}$$

Folie 16

Kalkül wird aufwendig für die Berechnung mehrdimensionaler Strömungen



mit
Abhängigkeit
der
Geschwindigkeit \underline{c}
von
 t, x, y

Folie 17

Kontinuitätsgleichung - Massenerhaltungssatz

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \underline{c} = 0$$

Strömungsgeschwindigkeit

$$\underline{c} = \underline{c}(\underline{x}, t)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial c_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \cdot c_i) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho c_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho c_z}{\partial z} = 0$$

Dichte

$$\rho = \rho(\underline{x}, t)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho c_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho c_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho c_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T \quad \text{ideale Gasgleichung}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

Folie 18

lokale und konvektive Beschleunigung - Ableitungen nach der Zeit

$$\frac{d}{dt} \rightarrow f(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow f(t, \underline{x}) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\underline{x}=\text{const.}}$$

$$\frac{D}{Dt} \rightarrow f(t, \underline{x}) \rightarrow \frac{D}{Dt} \Big|_{\text{Teilchen}=\text{const.}}$$

$$\frac{D\underline{c}}{Dt} = \frac{\partial \underline{c}}{\partial t} + \underline{c} \cdot \operatorname{grad} \underline{c}$$

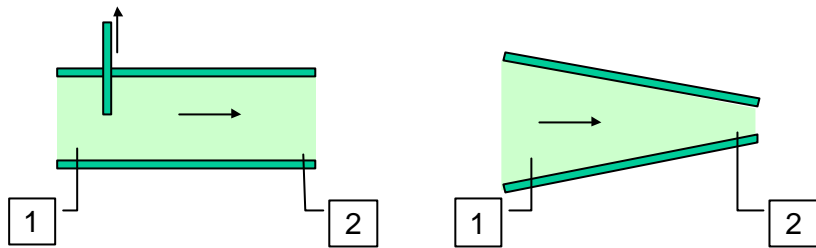
substantielle Beschleunigung

lokale Beschleunigung

konvektive Beschleunigung

= nicht linear

Folie 19



lokale Beschleunigung

konvektive Beschleunigung

$$\frac{\partial c_i}{\partial t}$$

$$c_j \frac{\partial c_i}{\partial x_j}$$

nicht linear

Folie 20

Impulsgleichung

$$\rho \frac{D\underline{c}}{Dt} = \rho \underline{f} - \text{grad} p + \text{grad} \underline{\tau} \text{div} \underline{c} + \rho \underline{g} + \text{grad} \mu \cdot (\text{grad} \underline{c} + \text{grad}^T \underline{c}) + \mu (\Delta \underline{c} + \text{grad} \text{div} \underline{c}) - \frac{2}{3} (\text{grad} \mu \text{div} \underline{c} + \mu \text{grad} \text{div} \underline{c})$$

inkompressible Strömung $\text{div} \underline{c} = 0$

Zähigkeit konstant $\text{grad} \mu = 0$

$$\rho \frac{D\underline{c}}{Dt} = \rho \underline{f} - \text{grad} p + \mu \Delta \underline{c}$$

Beschleunigung Erdbeschleunigung Druck Reibung

Folie 21

Reynoldsgleichung

Impulssatz für inkompressible newtonsche Fluide (Navier-Stokes-Gleichung)

$$\rho \frac{D\underline{c}}{Dt} = \rho \underline{f} - \text{grad} p + \mu \Delta \underline{c}$$

Mittelwerte und Schwankungsgrößen

$$p = \bar{p} + p' \quad \underline{c} = \bar{\underline{c}} + \underline{c}'$$

$$\frac{\partial \bar{c}_i}{\partial t} + \frac{\partial c'_i}{\partial t} + \bar{c}_j \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} + c'_j \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} + \bar{c}_j \frac{\partial c'_i}{\partial x_j} + c'_j \frac{\partial c'_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 \bar{c}_i}{\partial x_j^2} + \eta \frac{\partial^2 c'_i}{\partial x_j^2}$$

Folie 22

Reynoldsgleichung

zeitliche Mittelung der Gleichung

$$\frac{\partial \bar{c}_i}{\partial t} + \frac{\partial c'_i}{\partial t} + \bar{c}_j \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} + c'_j \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} + \bar{c}_j \frac{\partial c'_i}{\partial x_j} + c'_j \frac{\partial c'_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 \bar{c}_i}{\partial x_j^2} + \eta \frac{\partial^2 c'_i}{\partial x_j^2}$$

$\frac{\partial \bar{c}_i}{\partial t} + \bar{c}_j \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial x_j} + c'_j \frac{\partial c'_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 \bar{c}_i}{\partial x_j^2}$
 Konti-Gl. und Produktregel rückwärts

„turbulente“ Zähigkeit → Turbulenzmodelle etc.

nicht lineare partielle Differentialgleichung mit Orts- und Zeitabhängigkeit

Folie 23

Wirbelschleppen - instationäre und turbulente Strömungen



Quellen: WDR, Quarks, 6/1999, <http://www.quarks.de/fliegen2/00.htm>
 M.Schober, <http://obiwan.pi.tu-berlin.de/M.Schober/wjallcases/acoustic.mpeg>

Folie 24

Energiegleichung → für kompressible Strömungen (c > 100 m/s)

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{c} + \left(\bar{\mu} - \frac{2}{3} \mu \right) (\operatorname{div} \underline{c})^2 + \frac{\mu}{2} (\operatorname{grad} \underline{c} + \operatorname{grad}^T \underline{c}) \cdot (\operatorname{grad} \underline{c} + \operatorname{grad}^T \underline{c}) + w - \operatorname{div} \underline{q}$$

dynamische Zähigkeit (Viskosität)
 innere Energie
 Volumenviskosität
 Wärmequellendichte
 Wärmestromdichte

Folie 25

Zusammenfassung

Akustik	Aerodynamik
Schallschnelle	Geschwindigkeitsschwankung (mit der der Turbulenzgrad berechnet wird)
Schalldruck (Druckschwankung, die sich mit Schallgeschwindigkeit ausbreitet)	Druckschwankung
lineare DGL	nicht lineare DGL

Folie 29

Strömungsmechanische Betrachtungsweise

In der Strömungsmechanik werden die unbekanntenen Größen Geschwindigkeit \underline{c} , Druck p , Dichte ρ und die spezifische innere Energie e mit Hilfe der physikalischen Axiome für die Erhaltung der Masse, des Impulses und der Energie sowie einer speziellen Zustandsgleichung zur Berücksichtigung der Materialeigenschaften berechnet, wobei die betrachtete Umgebung ein Kontinuum ist.

In differentieller Formulierung für einen Punkt im Raum lautet die aus der Massenerhaltung resultierende Kontinuitäts-Gleichung:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \underline{c} = 0 \quad (1)$$

Unter Berücksichtigung des Newtonschen Schubspannungsansatzes für ein isotropes Fluid folgt aus der Impulserhaltung die Navier-Stokes-Gleichung:

$$\rho \frac{D\underline{c}}{Dt} = \rho \underline{f} - \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} \tau \operatorname{div} \underline{c} + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{c} + \operatorname{grad} \mu \cdot (\operatorname{grad} \underline{c} + \operatorname{grad}^T \underline{c}) + \mu (\Delta \underline{c} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{c}) - \frac{2}{3} (\operatorname{grad} \mu \operatorname{div} \underline{c} + \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{c}) \quad (2)$$

mit der Kraftdichte \underline{f} , der Volumenviskosität μ und der dynamischen Zähigkeit μ .

Für die Erhaltung der Energie in einem strömenden Fluid gilt der 1. Hauptsatz der Thermodynamik unter Berücksichtigung der Impulserhaltung in der Form:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \operatorname{div} \underline{c} + \left(\mu - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \underline{c} + \frac{\mu}{2} (\operatorname{grad} \underline{c} + \operatorname{grad}^T \underline{c}) \cdot (\operatorname{grad} \underline{c} + \operatorname{grad}^T \underline{c}) + w - \operatorname{div} \underline{q}, \quad (3)$$

mit der Wärmequellendichte w und der Wärmestromdichte \underline{q} .

Diese 5 Gleichungen (die Navier-Stokes-Gleichung stellt eine Vektorgleichung mit 3 Komponenten dar) und eine spezielle Zustandsgleichung, so daß die thermodynamischen Materialeigenschaften berücksichtigt werden, bilden ein nichtlineares partielles Differentialgleichungssystem für die unbekanntenen Momentanwerte \underline{c} , p , ρ und e . Analytisch läßt sich insbesondere wegen der Nichtlinearität der konvektiven Beschleunigung $\underline{c} \cdot \operatorname{grad} \underline{c}$ keine allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems angeben. Moderne numerische Berechnungsmethoden erzeugen für viele Anwendungsfälle aber Ergebnisse mit einer guten Übereinstimmung zum Experiment. Allerdings ist es noch nicht möglich, sogenannte Simultanlösungen zu bestimmen, die zu beliebigen Zeiten an jedem Ort die Kenngrößen berechnen. In der Regel werden die Kenngrößen daher nach einem Vorschlag von Reynolds aus dem Jahre 1894 in Mittelwerte und Schwankungsgrößen aufgeteilt. Schwankungsterme sind per Definition im zeitlichen Mittel null, so daß nach Einsetzen des Reynoldschen Ansatzes in das Differentialgleichungssystem und anschließender Mittelung der Gleichungen die linearen Schwankungsanteile herausfallen. Die sogenannten Reynolds-Gleichungen gelten dann nur noch für zeitlich gemittelte Größen aber unter Berücksichtigung von Schwankungsanteilen.

Akustische Betrachtungsweise

In der Akustik interessiert man sich im wesentlichen für die zeitliche Änderung des Drucks, Druckschwankung genannt. Die in der Strömungsmechanik verwendeten Reynolds-Gleichungen ermöglichen jedoch nicht die Berechnung dieser Druckschwankungen, die im zeitlichen Mittel ja gerade verschwinden. Man formt daher in der Akustik die Kontinuitätsgleichung (1) und die Impulsgleichung (2), häufig unter Vernachlässigung der linear eingehenden Reibungseinflüsse und der Volumenkraftdichte, derart zu einer inhomogenen Wellengleichung um, daß der in der Strömungsmechanik große Probleme bereitende nichtlineare konvektive Beschleunigungsterm in die Inhomogenität der Gleichung gezogen wird.

Differenziert man die Kontinuitätsgleichung nach der Zeit t und subtrahiert davon die Divergenz der Impulsgleichung für ein reibungsfreies Medium unter Vernachlässigung der Volumenkraftdichte, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \text{div div}(\rho \underline{c} \underline{c}) \quad .$$

Erweitert man nun beide Seiten mit $\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$, ergibt sich eine inhomogene Wellengleichung

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \text{div div}(\rho \underline{c} \underline{c}) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{p}{a_0^2} - \rho \right) = Q \quad , \quad (4)$$

a_0 ist die Ruheschallgeschwindigkeit eines idealen Gases. Die rechte Seite der Gleichung läßt sich als Quellterm Q interpretieren, so daß es sich um eine lineare partielle Differentialgleichung für den Druck $p(\underline{x}, t)$ handelt.

Der 2. Term auf der rechten Seite läßt sich mit Hilfe des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik in Form der Gibbschen Gleichung

$$ds = \frac{1}{T} de - \frac{p}{\rho^2 T} d\rho \quad , \quad (5)$$

mit der spezifischen Entropie s und der Temperatur T , sowie der idealen und der kalorischen Zustandsgleichung unter Berücksichtigung der Definition für die Schallgeschwindigkeit

$$a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \quad , \quad (6)$$

mit dem Isentropenexponenten κ , umformen zu

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{p}{a_0^2} - \rho \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial p}{\partial t} \left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{\rho}{c_p} \frac{\partial s}{\partial t} \right] \quad , \quad (7)$$

mit der spezifischen Wärmekapazität c_p . Dieser Term liefert also nur einen Beitrag für anisentrope Strömungen und für Strömungen mit einer sich von der Ruheschallgeschwindigkeit a_0 unterscheidenden Schallgeschwindigkeit a .

Literatur

Brüning, Dreifert, Grünewald, Raabe, Yogeshwar: Faszination Fliegen
<http://www.quarks.de/fliegen2/00.htm>

Kameier: Vorlesungsskript Strömungsmaschinen, FH Düsseldorf 1999,
<http://www.fh-duesseldorf.de/muv/STRM/download.htm>

Kameier, Reinartz: Vorlesungsskript Strömungsakustik, FH Düsseldorf 1999
<http://www.fh-duesseldorf.de/muv/STRM/download.htm>

Kameier, Frank: Experimentelle Untersuchung zur Entstehung und Minderung des Blattspitzen-Wirbellärms axialer Strömungsmaschinen, VDI-Fortschritt Berichte, Reihe 7, Nr. 243, Düsseldorf, 1994.

Liggett, Caughey: Fluid Mechanics - An Interactive Text, ASME 1998

Michalke, Alfons: Vorlesungsskript Strömungsakustik, Berlin 1986

Schade, Kunz: Strömungslehre, de Gruyter, 1989